Eine Bemerkung über die Bedeckung der Ebene durch Eibereiche mit Mittelpunkt.

Von LÁSZLÓ FEJES in Kolozsvár.

In einem hinreichend großen Quadrat vom Inhalt T können höchstens $n \sim \frac{\sqrt{3}\pi}{6} T$ kongruente Ellipsenscheiben vom Inhalt 1 gesondert eingelagert werden. Genauer: die Dichte eines Systems kongruenter Ellipsen, die keine inneren Punkte gemein haben, ist unabhängig von der Exzentrizität und der Anordnung der Ellipsen $\leqq \sqrt{3}\pi/6$ $(= 0{\cdot}907\ldots)$.[1]) Ersetzt man dagegen die Ellipsen durch beliebige andere kongruente Eibereiche, so gibt es nach einer Vermutung von R. COURANT[2]) schon eine gitterförmige Anordnung derselben mit einer Dichte, die $> \sqrt{3}\pi/6$ ausfällt.

Betrachten wir nun ein System kongruenter Ellipsen, das die Ebene lückenlos bedeckt. Setzen wir noch voraus, daß die Ellipsen sich in höchstens zwei Punkten schneiden[3]), so läßt sich zeigen, daß die Dichte dieses Systems $\geqq 2\sqrt{3}\pi/9$ $(= 1{\cdot}209\ldots)$ ist[4]). Nun gilt für Bereiche mit Mittelpunkt folgender, der Courantschen Vermutung dual gegenüberstehender

Satz. *Ist B ein konvexer Bereich mit Mittelpunkt, das nicht von einer Ellipse begrenzt ist, so gibt es eine gitterförmige Bedeckung der Ebene durch zu B kongruente Bereiche mit einer Dichte* $< 2\sqrt{3}\pi/9$.

---

[1]) Für Ellipsen in paralleler Lage folgt dies aus der Lösung des Problems der dichtesten Kreislagerung. Zum allgemeinen Fall s. L. FEJES, Extremális pontrendszerek a síkban, a gömbfelületen és a térben, *Acta Sci. Math. Nat.*, 23 (Kolozsvár, 1944), S. 15.

[2]) W. BLASCHKE, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Berlin, 1923, S. 65.

[3]) Diese Einschränkung ist wahrscheinlich überflüssig.

[4]) S. die in [1]) zitierte Arbeit, S. 17. Für Kreise wurde dies zum erstenmal von R. KERSHNER, [The number of circles covering a set, *Amer. J. Math.*, 61 (1939), S. 665—671] bewiesen. Diese Ungleichung — sowie die oben angegebene — gilt auch für inkongruente flächengleiche Ellipsen von gleichmäßig beschränktem Umfang.

Dies ist eine unmittelbare Folgerung der Sasschen Konstruktion[5]), aus der hervorgeht, daß in B stets ein größeres Sechseck mit Mittelpunkt eingeschrieben werden kann, als in eine flächengleiche Ellipse. Die verlangte Bedeckung erfolgt durch die Auspflasterung der Ebene durch diese Sechsecke.

Hieraus ergibt sich folgendes — in gewisser Hinsicht scheinbar allgemeineres — Korollar: *Durch ein System großer Anzahl konvexer Figuren mit Mittelpunkt, deren Umfang unterhalb einer vorgegebenen Schranke L bleibt, läßt sich ein im Endlichen liegendes ebenes Gebiet vorgegebener Gestalt vom Inhalt* $T \sim \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} F$ $(=0{\cdot}83\ldots F)$ *überdecken, wobei F die Inhaltssumme der Figuren bedeutet.* Die Figuren lassen sich nämlich für ein beliebiges positives ε (nach bekannten Sätzen über kompakte Mengen und dem Blaschkeschen Auswahlsatz) in eine nur von ε und L abhängige Anzahl von Teilsystemen derart eingliedern, daß die Figuren eines Teilsystems weniger als ε von einander (im gebräuchlichen Sinn) abweichen. Um die Richtigkeit unserer Behauptung einzusehen, bedecke man durch jedes Teilsystem je einen geeigneten Teilbereich des Gebiets.

Ob das alles auch für Bereiche ohne Mittelpunkt gilt, steht noch nicht fest.

Zum Schluß sei bemerkt, daß zum Beweis der Courantschen Vermutung das umgeschriebene Sechseck heranzuziehen versucht werden sollte. Dies scheint aber Schwierigkeiten zu bereiten[6]). Allerdings sei bemerkt, daß unter den flächengleichen konvexen Bereichen der Inhalt des kleinsten umgeschriebenen n-Ecks im allgemeinen nicht für die Ellipsen den größtmöglichen Wert besitzt. Für $n=3$ ist z. B. der extremale Bereich das Parallelogramm (s. [2]), S. 64). Dagegen liefert die Ellipse schon von $n=3$ ab das Extremum der analogen Aufgabe für das eingeschriebene n-Eck[7]).

(Eingegangen am 21. Juli 1944.)

Bemerkung während der Korrektur. Eine Anordnung von Bereichen heißt in üblicher Weise gitterförmig, falls jedes Bereich sich von einem festen durch wiederholte Anwendung von zwei eben-

---

[5]) E. Sas, Über eine Extremumeigenschaft der Ellipsen, *Comp. Math.*, **6** (1939), S. 468—470.

[6]) Vgl. L. Fejes, Eine Bemerkung zur Approximation durch n-Eckringe, *Comp. Math.*, **7** (1940), S. 474—476.

[7]) Für $n=3$ wurde dies von Blaschke (s. [2]), § 22, S. 49) bewiesen.

falls festen Verschiebungen, oder ihren Inversen, erzeugen läßt. Dies festgelegt bemerken wir, daß die maximale Dichte eines gitterförmigen Systems gesonderter Dreiecke — wie leicht einzusehen ist — 2/3 beträgt, was die Courantsche Vermutung widerlegt. Um die Wahrscheinlichkeit der Extremaleigenschaft der Ellipsen aufrechtzuerhalten, sollte daher in der Courantschen Vermutung entweder die Einschränkung auf Bereiche mit Mittelpunkt gemacht werden, oder sollten statt gitterförmigen Anordnungen auch die umfassendere regelmäßige Bereichlagerungen (s. z. B. HILBERT—COHN-VOSSEN, Anschauliche Geometrie, Berlin, 1932, §. 9—12) zugelassen werden. Die Frage, ob in der ursprünglichen Fassung des Problems von COURANT das Dreieck das extremale Gebiet ist, bleibt noch zu untersuchen.

Analoges läßt sich bezüglich der Probleme der dünnsten Bedeckung der Ebene aussagen. Unser Satz gilt daher ohne die Beschränkung auf Bereiche mit Mittelpunkt nicht mehr. Dagegen ist zu erwarten, daß das obige Korollar ihre Gültigkeit — da dort von irgendeiner gitterförmigen Lagerung gar keine Rede ist — auch für allgemeine konvexe Bereiche behält.

Übrigens vgl. den ganzen Aufsatz mit H. HADWIGER, Überdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate, *Comm. Math. Helv.,* **13** (1943), S. 195—200.

(Hinzugefügt am 15. Oktober 1945.)